Jochen Weber

Flächeninhalt eines Kreises

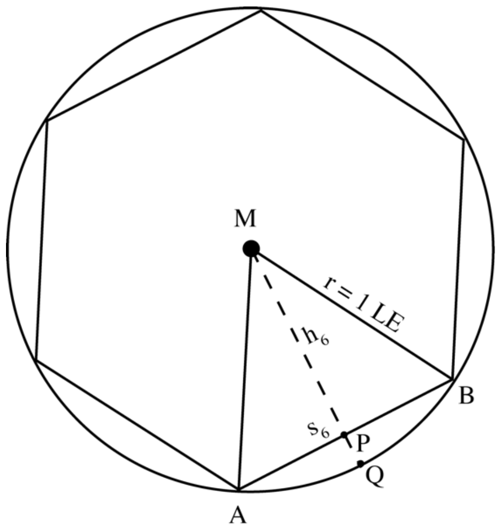
Abrollen zweier „Kreise“ (Pappteller und Gymnastikreifen) und jeweils die Wegstrecke nach einer Umdrehung messen und mit dem jeweiligen Durchmesser ins Verhältnis setzen,
d.h. $\frac{U}{d}$.
Überraschenderweise kommt beides Mal fast dasselbe Verhältnis heraus, d.h. offensichtlich ist das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser eines jeden Kreises eine feste Zahl.

Bei allen Kreisen mit Umfang U und Durchmesser d ist $\frac{U}{d}$ eine bestimmte feste Zahl.

Diese Zahl bezeichnet man mit π.

Für den Umfang eines Kreises mit Radius r gilt also: $U_{Kreis} = \pi \cdot d = 2 \cdot r \cdot \pi$

Bestimmung eines Näherungswertes für π :



Das regelmäßige Sechseck hat den Umfang 6 LE (gleichseitige Dreiecke)

Berechnung der Länge s_{12} einer Seite des regelmäßigen Zwölfecks:

$$(s_{12})^2 = \left(\left|\overline{PB}\right|\right)^2 + \left(\left|\overline{PQ}\right|\right)^2$$

$$\left|\overline{PB}\right| = \frac{1}{2}s_6 \qquad \left|\overline{PQ}\right| = \left|\overline{MQ}\right| - \left|\overline{MP}\right| = 1 - h_6$$

Berechnung von h_6: $1^2 = \left(\frac{s_6}{2}\right)^2 + (h_6)^2$ (Satz des Pythagoras im Dreieck PBM)

$$(h_6)^2 = 1 - \left(\frac{s_6}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow h_6 = \sqrt{1 - \left(\frac{s_6}{2}\right)^2} \quad \Rightarrow \left|\overline{PQ}\right| = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{s_6}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow (s_{12})^2 = \left(\frac{s_6}{2}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{s_6}{2}\right)^2}\right)^2 \quad \Rightarrow s_{12} = \sqrt{\left(\frac{s_6}{2}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{s_6}{2}\right)^2}\right)^2}$$

$s_{12} \approx 0{,}517638090205$ (mit Taschenrechner berechnen)

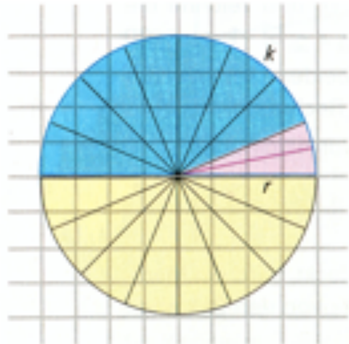
$\Rightarrow U = 12 \cdot s_{12} \approx 6{,}211657082461$

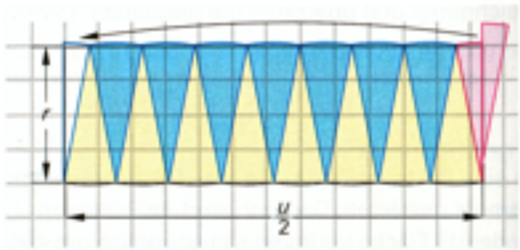
$\Rightarrow \pi = \frac{U}{2} \approx 3{,}105828541230$ (da r = 1 LE)

Das Verfahren lässt sich fortsetzen: $s_{24} = \sqrt{\left(\frac{s_{12}}{2}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{s_{12}}{2}\right)^2}\right)^2}$

Herleitung der Maßzahl des Flächeninhalts eines Kreises:

Man teilt eine Kreisscheibe in n gleich große Sektoren und setzen sie wie in nachfolgender Figur wieder zusammen. Die so entstehende Figur hat ungefähr das Aussehen eines Rechtecks.





Für die Maßzahl des Flächeninhalts eines Kreises gilt also: $A_{Kreis} = \frac{u}{2} \cdot r = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{2} \cdot r = r^2 \cdot \pi$